Damit ist die Reibkraftkomponente F_{R_y} die einzige Unbekannte in diesen Gleichungen. Setzt man innerhalb eines Belagsektors i die Reibungszahl konstant ($\mu_{ij} = \mu_i$), dann lassen sich aus den Gleichungen 2.2.45 bis 2.2.55 die folgenden Gleichungen für die resultierenden Reibkraftkomponenten ermitteln:

$$F_{R_x} = F_S \, C_7 \, S_8 - 2 F_{R_y} \, C_8 \, S_8 \qquad (2.2.56)$$

$$F_{R_y} = F_S \, \frac{C_5 \, S_6 + C_6 \, S_7}{1 - 2 C_8 \, a_1 \, S_6} \qquad (2.2.57)$$

Es erscheint gerechtfertigt, die Reibungszahl eines Belagsektors i konstant zu setzen, da die Reibgeschwindigkeiten und die Reibtemperaturen innerhalb eines Belagsektors örtlich nur gering differieren (abgesehen von kurzzeitigen Temperaturspitzen) und der Einfluß von Flächenpressungsunterschieden auf die Reibungszahl nicht so groß ist, wie z.B. der von Temperaturunterschieden. Damit können die partiellen Flächenpressungen annähernd berechnet werden, wenn die Abmessungen, die Zuspannkraft und die Reibungszahlen bekannt sind.
Die vorgestellten mathematischen Grundlagen beziehen sich auf eine gleichmäßige Flächenpressungsverteilung innerhalb eines Flächenelementes. Exakt wäre, wenn die ungleichmäßige Belastung in einem Flächenelement berücksichtigt wird (zusätzliches Flächenträgheitsmoment). Durch Untersuchungen ist aber feststellbar, daß bei 5o Flächenelementen pro Belagfläche ($k=5; l_i=5$) in radialer Richtung des Belags bis zu einem maximalen Flächenpressungunterschied von etwa 1:1,5 und in tangentialer Richtung des Belags bis zu einem maximalen Flächenpressungsunterschied von etwa 1:4 nur ein Fehler unter 2% auftritt, wenn die Flächenpressungsverteilung in einem Flächenelement als gleichmäßig angenommen wird.

2.2.2. Ermittlung des Reibmomentes, des mittleren Reibradiuses und der integralen Reibungszahl

Für die Einschätzung des Funktionsverhaltens der Scheibenbremsenreibpaarungen sind das Reibmoment, der mittlere Reibradius und die integrale Reibungszahl wichtige Kenngrößen. Allerdings sind die Begriffe mittlerer Reibradius und integrale Reibungszahl nicht exakt, da ein mittlerer Reibradius nur genau definiert werden kann, wenn konstante Reibungszahlen über der gesamten Belagfläche existieren und eine integrale Reibungszahl konstante Belastungsverhältnisse über der Belagfläche ohne Selbstverstärkungseffekte voraussetzt.

Aus den Gleichungen 2.2.58 bis 2.2.60 läßt sich die folgende Gleichung für das Reibmoment herleiten:

$$M_R = F_S(C_5\, S_9 + C_6\, S_{10}) + 2\, F_{R_y}\, C_8\, a_1\, S_9 \qquad (2.2.61)$$

Aus der Summe aller partiellen Reibkräfte (Gl. 2.2.62 bis 2.2.65 in der Anlage 1), dem Reibmoment und der Zuspannkraft ergeben sich die Gleichungen für den mittleren Reibradius

$$r_m = \frac{M_R}{\sum F_{R tan}} \qquad (2.2.66)$$

und der integralen Reibungszahl

$$\mu_{int} = \frac{\sum F_{R tan}}{F_S} \qquad (2.2.67)$$

2.2.3. Ermittlung der das Verschleißverhalten der Scheibenbremsreibpaarung beschreibenden spezifischen Belastungskenngrößen

Wie bereits im Abschnitt 2.1. erläutert, lassen sich aus der Verteilung der Reibleistung qualitative Rückschlüsse hinsichtlich des Belag- und Scheibenverschleißes treffen. Ausgehend von der allgemeinen Gleichung

$$P_R = M_R\, \omega = F_R \cdot r\, \omega \qquad (2.2.68)$$

für Gesamtreibleistung sind die Gleichungen für die partiellen Reibleistungen und der auf die Fläche eines Belagsektors i bezogenen Reibleistung (Gl. 2.2.69 bis 2.2.71 in der Anlage 1) ableitbar. Wird die Gleichung 2.2.71 durch die Fläche des Belagsektors i und durch die Winkelgeschwindigkeit ω dividiert, dann ergibt sich die folgende Gleichung der spezifischen auf die Fläche des Belagsektors i bezogene Reibleistung :

$$P_{RBispez} = \frac{P_{Ri}}{A_i\, 2 l_i\, \omega} = \frac{r_{Si}\, \mu_i}{2\; l_i} \sum_j (p_{lijges} + p_{rijges}) \qquad (2.2.72)$$

Durch Division der Gleichung 2.2.71 mit der mit dem Belagsektor i im Eingriff stehenden Scheibenreibfläche

$$A_{Sch_i} = (r_{a_i}{}^2 - r_{i_i})\, \pi \qquad (2.2.73)$$

und der Winkelgeschwindigkeit ω , dann ergibt sich die folgende Gleichung der spezifischen auf die mit dem Belagsektor i im Eingriff stehende Scheibenreibfläche bezogene Reibleistung:

$$P_{RSchispez} = \frac{P_{RBispez}\, A_i\, 2\, l_i}{A_{Sch_i}} \qquad (2.2.74)$$

Für beide spezifischen Kenngrößen lassen sich die Gesamtflächen bezogenen Mittelwerte nach den folgenden Gleichungen ermitteln:

$$P_{RBmspez} = \frac{\sum_i P_{R_i}}{\omega \sum_i A_i \sum_j 2} = \frac{\sum_i A_i\, r_{S_i}\, \mu_i \sum_j (p_{lijges} + p_{rijges})}{\sum_i A_i\, l_i\, 2} \qquad (2.2.75)$$

$$P_{RSchmspez} = \frac{\sum_i P_{R_i}}{\omega \sum_i A_{Sch_i}} = \frac{\sum_i A_i\, r_{S_i}\, \mu_i \sum_j (p_{lijges} + p_{rijges})}{\sum_i A_{Sch_i}} \qquad (2.2.76)$$

Wenn beide spezifischen Kenngrößen $P_{RB_{ispez}}$ und $P_{RSch_{ispez}}$ linear radial über die Reibflächen verteilt sind, können ebene Verschleißflächen der Bremsscheibe erwartet werden, sofern normale Verschleißmechanismen wirken. Für die Beurteilung der Reibflächenbelastung ist ferner noch die mittlere Flächenpressung von Bedeutung:

$$p_m = \frac{\sum_i A_i \sum_j (p_{lijges} + p_{rijges})}{\sum_i A_i \, l_i \, 2} \qquad (2.2.77)$$

2.2.4. Ermittlung der Hauptabstützkräfte am Bremsklotz und der Verschiebung des Zuspannkraftangriffspunktes

Infolge der entgegengesetzten Richtungen der partiellen Reibkraftkomponenten $F_{Rl_{ijx}}$ und $F_{Rr_{ijx}}$ und ihren Abständen zueinander wird ein Moment M am Bremsklotz aufgebaut (Bild 2.6). An einem in /15/ vorgeschlagenen Lösungsprinzip wird dieses Moment z.B. dafür genutzt, um einen drehbaren kreisringförmigen Bremsklotz ständig in Drehbewegung zu halten, um damit einen gleichmäßigen Belagverschleiß zu erreichen. Wegen des hohen Aufwands und der zu erwartenden ungünstigen Scheibenabnutzung dürfte dieses Prinzip kaum für eine serienmäßige Anwendung geeignet sein. Für die Wahl der Hauptabstützstellen (A1 u. A2) ist aber die Einbeziehung dieses Momentes wichtig, da es bei ungünstiger Wahl der Hauptabstützstellen zu einem Verkanten des Bremsklotzes mit der Belagträgerplatte im Bremssattel führen kann ($F_{A2_y} = 0$). Zur Beurteilung ist deshalb die Ermittlung der Hauptabstützkraft F_{A2_y} notwendig. Aus den Gleichungen 2.2.78 bis 2.2.81 ist die folgende Gleichung für F_{A2_y} ableitbar:

$$F_{A2_y} = \frac{F_S}{b_1 - b_2} \Big[C_5(b_1 S_6 - S_7 - S_8) + C_6(b_1 S_7 - S_{13} - S_{14})$$

$$+ C_7 a_1 S_8 + 2 C_8 a_1 \frac{(b_1 S_6 - S_7 - 2S_8)(C_5 S_6 + C_6 S_7)}{1 - 2 C_8 a_1 S_6} \Big] \quad (2.2.82)$$

Im Abschnitt 2.1. wurde bereits der annähernde proportionale Zusammenhang zwischen Verschleißgeschwindigkeit und Reibleistungsbelastung dargestellt. Dieser Zusammenhang führt dazu, daß ein Belag, der im Neuzustand infolge einer ungünstigen Lage des Zuspannzylinders (Lage des Zuspannkraftangriffspunktes) ungleichmäßig mit Reibleistung (Bild 2.7a) belastet wird, so weit schräg verschleißt, bis sich eine gleichmäßige Reibleistungsverteilung einstellt (Gleichgewichtszustand infolge Belagverschleiß). Diese gleiche Reibleistungsverteilung kann sich aber nur dann einstellen, wenn ab einem bestimmten Schrägverschleiß der Bremsklotz durch konstruktive Einflüsse (Kolben-Zylinder-Führung, Führungselemente bei Schwimmrahmen- und Schwimmsattelbremsen u.a.) am weiteren Schrägstellen gehindert wird. Im Bild 2.7b ist diese Situation an einem durch den Kolben direkt zugespannten Bremsklotz dargestellt. Das Kippen und die Anlage des Kolbens im Zylinder führt zwangsläufig zu einer Verlagerung des Zuspannkraftangriffspunktes (der immer im Flächenpressungsschwerpunkt liegen wird), wenn eine proportionale Beziehung zwischen Reibleistung und Verschleißgeschwindigkeit vorliegt. Entsprechend Bild 2.7d wird sich die Zuspannkraft F_S bis zum Erreichen der gleichmäßigen Reibleistungsverteilung um den Betrag Δs verschieben, wenn Δs kleiner als der Kolbenradius ist. Ist die Verschiebung Δs größer als der Kolbenradius (genauer - Radius der Auflagefläche am Kolben), dann kippt allerdings der Belagklotz weiter (Bild 2.7c). Unter den Bedingungen einer gleichmäßigen Reibleistungsverteilung über der Belagfläche wird sich eine gleichmäßige Verteilung der partiellen Flächenpressungen eines Belagsektors i einstellen, die nach folgender Gleichung sich berechnen läßt:

$$p_{iges} = p_{lijges} = p_{rijges} = P_{RBm\,spez} \frac{1}{r_{S_i}\, \mu_i} \qquad (2.2.83)$$

Daraus lassen sich die Gleichungen für die partiellen Normalkräfte

$$F_{N_i} = F_{Nl_{ij}} = F_{Nr_{ij}} = P_{RBm\,spez} \frac{A_i}{r_{S_i}\, \mu_i} \qquad (2.2.84)$$

die partiellen Reibkräfte

$$F_{R_i} = F_{Rl_{ij}} = F_{Rr_{ij}} = P_{RBm\,spez} \frac{A_i}{r_{S_i}} \qquad (2.2.85)$$

und die partiellen Reibkraftkomponenten

$$F_{R_{ix}} = F_{Rl_{ijx}} = F_{Rr_{ijx}} = P_{RBm\,spez} \frac{A_i}{r_{S_i}^2} |y_{ij}| \qquad (2.2.86)$$

$$F_{R_{iy}} = F_{Rl_{ijy}} = F_{Rr_{ijy}} = P_{RBm\,spez} \frac{A_i}{r_{S_i}^2} |x_{ij}| \qquad (2.2.87)$$

entwickeln. Aus den Kräfte- und Momentengleichgewichten $\sum F_z = 0$, $\sum M_{y_h} = 0$ und $\sum M_x = 0$ (Gl. 2.2.88 bis 2.2.93 in der Anlage 1) ergeben sich die Gleichungen für die spezifische belagreibflächenbezogene Reibleistung

$$P_{RBmspez} = \frac{F_S}{2\, S_{45}} \tag{2.2.94}$$

die Koordinaten der verschobenen Zuspannkraft

$$a_C = 2\,\frac{P_{RBmspez}}{F_S}\, h_A\, S_{46} = h_A \frac{S_{46}}{S_{45}} \tag{2.2.95}$$

$$b_C = 2\,\frac{P_{RBmspez}}{F_S}\, S_{47} = \frac{S_{47}}{S_{45}} \tag{2.2.96}$$

die Verschiebungen der Zuspannkraft

$$\Delta a = a - a_C \tag{2.2.97}$$

$$\Delta b = b - b_C \tag{2.2.98}$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \tag{2.2.99}$$

und die Verteilung der scheibenreibflächenbezogenen spezifischen Reibleistung

$$P_{RSchi\,spez} = P_{RBm\,spez} \frac{A_i\, l_i\, 2}{A_{Sch\,i}} \qquad (2.2.100)$$

2.3. Aufbau des Rechenprogramms

2.3.1. Gerätetechnische Voraussetzungen

Als Basis für den Aufbau des Rechenprogramms dient der programmierbare Tischrechner K 1002. Nach /2/ und /13/ besitzt dieser Rechner eine nutzbare Speicherkapazität von 4 kByte und arbeitet mit einer tastencodierten Befehlsstruktur. Für die Programmierung stehen 3992 Speicherplätze (je ein Byte) zur Verfügung, die zur Daten- und Programmspeicherung genutzt werden können. Ein Datenspeicher belegt acht Speicherplätze, ein Befehl einen Speicherplatz. Das Reicht zur Programmierung der im Abschnitt 2.2. diskutierten mathematischen Grundlagen nicht aus. Es erfolgte eine Aufteilung des Rechenprogramms in 4 Teilprogramme, so daß nach Abarbeitung der Teilprogramme A und B die Teilprogramme C und D nachgeladen werden müssen.

2.3.2. Erläuterung des Rechenprogramms

In der Anlage 2 sind die Programmablaufpläne, die Datenspeicherbelegungstabelle, die Befehlslisten und die Bedienanweisungen enthalten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in den Programmablaufplänen auf die Darstellung der programmierten Gleichungen und Programmschleifen verzichtet. Zur Variation des Angriffspunktes der Zuspannkraft wurde ein Faktor K_{PRB} (Teilprogramm B, Nummerateur 40) ins Programm aufgenommen:

$$K_{PRB} = \frac{C_5 + C_6\, r_{S1}\, r_{S1}}{C_5 + C_6\, r_{S_k}\, r_{S_k}} \qquad (2.3.1)$$

Bei konstanten Reibungszahlen (μ_i = konst) wird dieser Faktor $K_{PRB} \approx 1$, wenn eine gleichmäßige auf den Belag bezogene Reibleistungsverteilung vorliegt. Durch Variation der Eingabewerte (siehe Bedienanweisungen) kann dies erreicht werden.

Die Bedienanweisungen nehmen Bezug auf den Programmablaufplan. Damit ist eine eindeutige Abarbeitung des Rechenprogramms gegeben.

Zum Abarbeiten des Rechenprogramms in einem vollständigen Zyklus werden etwa 20 Minuten benötigt.

3. Bewertung der Reibpaarungsgeometrie einer ausgewählten Scheibenbremsenkonstruktion unter Anwendung des vorgestellten K 1002-Rechenprogramms

3.1. Voraussetzungen

Als Basis für die folgenden Berechnungsbeispiele dient eine Festsattelscheibenbremse, die im Bild 3.1 dargestellt ist. Diese Scheibenbremse bietet sich für die Untersuchungen an, weil an dieser auf Grund der im praktischen Einsatz gewonnenen Erkenntnisse von Belaghersteller, gestützt auf Prüfstandsuntersuchungen, die Bremsbelagkontur zum Erreichen eines gleichmäßigeren Scheibenverschleißes geändert wurde. In den folgenden Abschnitten soll deshalb mit Hilfe des erarbeiteten Rechenprogramms der theoretische Nachweis für die Zusammenhänge zwischen Reibpaarungsgeometrie und den daraus resultierenden Scheibenverschleißbild erbracht werden. Außerdem sollen auch Aussagen hinsichtlich des zu erwartenden Funktionsverhaltens getroffen werden.

Untersucht werden folgende Belagformvarianten:

Variante I (Bild 3.2a) - alte Belagkontur

Variante II (Bild 3.2b) - neue Belagkontur (vom Belaghersteller festgelegt, um ein besseres Scheibenverschleißverhalten zu erreichen)

Variante III (Bild 3.2c)- kreissektorförmige Belagkontur

Die Variante III soll eine Alternativlösung sei, bei deren Anwendung ein sehr gleichmäßiger Scheibenverschleiß zu erwarten ist.

3.2. Eingabewerte und Berechnungsergebnisse

In der Tafel 1 sind alle Eingabewerte aufgeführt. Es erfolgte eine Aufteilung in Teilvarianten a und b (Ia, IIa usw.). Diese unterscheiden sich durch die Wahl des Zuspannkraftangriffspunktes. Die Teilvarianten a beziehen sich auf einen aus den beiden Kolbenmittelpunkten resultierenden Kraftangriffspunkt (die beiden Zuspannkolben der ausgewählten Scheibenbremse werden als ein mittig angeordneter Kolben mit der entsprechenden Kolbenfläche betrachtet). Die für die Teilvarianten b angenommenen Zuspannkraftangriffspunktkoordinaten a und b gelten für eine annähernd gleichmäßige Reibleistungsverteilung über der Belagfläche und wurden durch Variation im Programm festgelegt ($K_{PRB} \approx \mu_1 / \mu_k$).

Die Werte der Reibungszahlen wurden mit 0,45 angenommen, das ist etwas höher als es der Belaghersteller angibt /31/. Es kann aber davon ausgegangen werden, daß die Belagreibungszahl zwischen 0,25 und 0,60 entsprechend der Belastungs- und Temperatureinflüsse schwankt. Die angenommene Zuspannkraft entspricht einer leichten Abbremsung (Dauerbremsung). Der auf die Belagabstützpunkte bezogene Abstand h_A gilt für einen unverschlissenen Bremsklotz.

In der Tafel 2 sind die Berechnungsergebnisse aufgeführt. Eine anschauliche Darstellung der errechneten Flächenpressungsverteilungen erfolgt in den Bildern 3.3 bis 3.8. Es wird die Aufteilung der Belagfläche in Flächenelemente deutlich (Maßstab 2:1).

Die in der Tafel 2 ab Nummerateur 61 aufgeführten Ausgabewerte gelten für eine gleichmäßige Reibleistungsverteilung über der Belagfläche ($P_{RB_{ispez}}$ = konst.), d.h., der Belag ist soweit verschlissen, daß der Kolben an der Zylinderwandung anliegt und somit eine größere Schiefstellung des Bremsklotzes verhindert. In diesem Fall ergibt sich eine Verschiebung des Zuspannkraftangriffspunktes, dessen neue Koordinatenwerte in der Tafel 2 ausgewiesen werden (a_c und b_c).

3.3. Auswertung der Berechnungsergebnisse

3.3.1. Verschleißprofil der Scheibenreibfläche

Zur Diskussion der berechneten spezifischen Belastungskenngrößen ($P_{RB_{ispez}}$, $P_{RSch_{ispez}}$), die im wesentlichen Informationen zur Beurteilung der Belaggeometrie hinsichtlich der zu erwartenden Verschleißverläufe liefern, eignen sich graphische Darstellungen gut. Da Bremsklötze der Varianten I und II an Serienfahrzeugen eingesetzt wurden und werden, bietet sich ein Vergleich der errechneten Belastungskenngrößen mit den an typisch verschlissenen Bremsklötzen gemessenen Verschleißhöhen an. Durch die in radialer Richtung in der Mitte der Belagreibfläche gemessenen Verschleißhöhen ist eine Aussage über die tendenziellen Verschleißverläufe an der Belagreibfläche und an der Scheibenreibfläche möglich.

In der Tafel 3 sind die gemessenen Verschleißhöhen zweier ausgewählter Bremsklötze , die ein typisches Verschleißbild zeigen, enthalten. Die Meßpunkte an der Belagreibfläche beziehen sich auf die Schwerpunktradien der Belagsektoren. Sehr deutlich wird der Zusammenhang zwischen den Verteilungen der auf die Scheibenreibfläche bezogenen Reibleistungen und den Verschleißhöhenverläufen (Bild 3.9 und 3.10). Infolge der sich in radialer Richtung der Reibfläche ändernden Überdeckungsgrade zwischen Scheiben- und Belagreibflächen kommt es bei linearen Verteilungen der auf die Belagreibfläche bezogenen Reibleistungen zu örtlich stark differenzierten auf die Scheibenreibfläche bezogenen Reibleistungen.

Gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Reibleistungsverteilungen und den Verschleißverlauf in radialer Richtung lassen sich mit dem in /13/ beschriebenen, an den Rechnern der Baureihe K 1000 hardware-seitig realisierten Programm zur Schätzung von Korrelations- und Regressionskenngrößen aus Stichproben einschätzen. Die gesetzmäßigen Zusammenhänge lassen sich durch die Ebenengleichung

$$h_{V(3)} = C_{Reg(3)} + a_{Reg1} P_{RBspez} + a_{Reg2} P_{RSchspez} \quad (3.1)$$

darstellen, deren Konstante C_{Reg} und die Anstiege $a_{Reg\,1}$ und $a_{Reg\,2}$ mit den Gleichungen 3.2 bis 3.11 (Anlage 1) ermittelt werden können (entsprechend /5/). Die Gleichungen gelten für drei Kenngrößen, deren gesetzmäßiger Zusammenhang eingeschätzt werden soll. Es werden mit $R_{(3)}$ der Korrelationskoeffizient, mit $\overline{P_{RB}}$, $\overline{P_{RSch}}$, $\overline{h_{Vi}}$ die arithmetischen Mittel und mit σ_1, σ_2, σ_{h_V} die Standardabweichungen bezeichnet. Anhand der in der Tafel 4 zusammengestellten berechneten Werte ergeben sich die Gleichungen für die Regressionsebenen für die Teilvariante Ia

$$h_{V(3)} = 5{,}691 + 0{,}016\, P_{RBspez} + 0{,}124\, P_{RSchspez}$$

und für die Teilvariante IIa

$$h_{V(3)} = 5{,}055 + 0{,}031\, P_{RBspez} + 0{,}260\, P_{RSchspez}$$

Die berechneten Korrelationskoeffizienten (Tafel 4) lassen einen gesetzmäßigen Zusammenhang erkennen ($-1 \leq R_{(3)} \leq 1$, $R_{(3)} = 0$ - kein gesetzmäßiger Zusammenhang). Allerdings muß beachtet werden, daß die belagreibflächenbezogenen Reibleistungsverteilungen der Teilvarianten Ia und IIa nur im Anfangsstadium des Verschleißes des Belags vorliegen und sich bei fortgeschrittenen Verschleißen gleichmäßige belagreibflächenbezogene Reibleistungsverteilungen einstellen (wenn die Verschleißgeschwindigkeit proportional der Reibleistung ist), da die Zuspannkolben nicht unbegrenzt kippen können. Für diesen Fall ist eine Einbeziehung der reibbelagbezogenen Reibleistungsverteilung in die Regressionsabschätzung nicht möglich ($P_{RB_{ispez}} = \overline{P_{RB}}$, $\sigma_1 = 0$) und auch nicht notwendig. Die Regressionsgerade wird dann durch die Gleichung

$$h_{V(2)} = c_{Reg(2)} + a_{Reg(2)} P_{RSch_{spez}} \qquad (3.12)$$

definiert (zwei abhängige Kenngrößen), deren Komponenten mit den Gleichungen 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.13, 3.14 und 3.15 (Anlage 1) berechnet werden. Damit ergeben sich die Regressionsgeraden (Tafel 5) für die Variante I

$$h_{V(2)} = 6{,}124 - 0{,}081\ P_{RSch_{spez}}$$

und die Variante II

$$h_{V(2)} = 6{,}298 - 0{,}226\ P_{RSch_{spez}}$$

für konstante reibbelagbezogene Reibleistungsverteilung. Die errechneten relativ hohen Korrelationskoeffizienten (Tafel 5) bestätigen die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen den durch h_{Vi} charakterisierten Scheibenverschleißprofilen und den Verteilungen der auf die Scheibenreibfläche bezogenen spezifischen Reibleistungen. Aus den Bildern 3.11 und 3.12 ist die gute Übereinstimmung der errechneten und gemessenen Werte mit den Regressionsgeraden ersichtlich. Demnach läßt eine kreissektorförmige Gestaltung der Belagfläche (Variante III) annähernd lineare Verschleißprofile an den Scheibenreibflächen erwarten, unter der Voraussetzung, daß Reibleistung und Verschleißgeschwindigkeit zueinander in einem annähernd proportionalen Zusammenhang stehen (Bild 3.13).

3.3.2. Schrägverschleiß des Belags und Kippen des Zuspannkolbens

Im folgenden soll untersucht werden, inwieweit die Berechnungsergebnisse Schlußfolgerungen hinsichtlich der am Belag zu erwartenden Schrägverschleiße (radial und tangential) und der zu erwartenden durch Kippen der Zuspannkolben hervorgerufenen Reibkräfte an der Kolben-Zylinder-Paarung zulassen. Dabei wird ausschließlich das Prinzip der Festsattelscheibenbremse berücksichtigt, bei dem beide Bremsklötze direkt von dem Zuspannkolben an die Bremsscheibe gedrückt werden. Für andere Scheibenbremsenbauarten mit zum Teil indirekter Zuspannung (Bolzenführung, Prismenführung) ist die folgende Berechnungsmethode mit geringen Änderungen anwendbar. Wie bereits erläutert wurde, erfolgt, wenn der Belag so weit verschlissen ist, daß der Kolben im Zylinder verkantet, eine Verschiebung des Kraftangriffspunktes um einen Betrag Δs, der sich mit den Gleichungen 2.2.97 bis 2.2.99 berechnen läßt. Die Verschiebung der Zuspannkraft F_S verursacht ein Kippmoment am Kolben. Die Berechnungsgleichungen für die durch dieses Kippmoment hervorgerufenen Reibkräfte lassen sich aus dem Bild 3.14 herleiten. Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.16 bis 3.20 in der Anlage 1) ergibt sich die Berechnungsgleichung für das Zuspannkraft-Kolbenkraftverhältnis

$$\frac{F_S}{F_K} = \frac{1}{1 + \frac{2\,\mu_K\,\Delta s}{l_{AK1} + a_A + h - l_{AK2}}} \qquad (3.21)$$

ohne Berücksichtigung der Reibkräfte am Dicht- und Nachstellring. In der Tafel 6 sind Berechnungsergebnisse für die Variante III aufgeführt. Eine anschaulichere Darstellung der Ergebnisse erfolgt in den Bildern 3.15 und 3.16. Wie daraus hervorgeht, ergibt sich eine für das Funktionsverhalten der Bremse günstiger Verlauf des Zuspannkraft-Kolbenkraft-Verhältnisses bei einer Krafteinleitungsstelle mit den Koordinaten b = 93,3 mm und a = 4 mm. Damit ergeben sich geringe Kolbenreibkräfte über dem gesamten Verschleißweg (h_A = 12 ... 4 mm) des Belags. Außerdem wird damit ein besseres Übergangsverhalten zu Beginn des Belagverschleißes geschaffen. Denn ein neuer Belag verursacht noch kein Verkanten des Kolbens im Zylinder und damit treten auch noch keine Reibkräfte an der Zylinderwandung auf. Erst nach einem Mindestschrägverschleiß des Belages kommt es zum Aufbau dieser Reibkräfte. Da dieser Mindestschrägverschleiß zu einem unterschiedlichen Zeitpunkt an den Bremsen einer Achse auftreten kann, sollte das Zuspannkraft-Kolbenkraft-Verhältnis beim Erreichen dieses Mindestverschleißes groß sein, damit keine großen Bremskraftunterschiede an den beiden Bremsen auftreten. Die berechneten Diagramme sind deshalb nicht ganz exakt, da die Bereiche bis zum Mindestverschleiß nicht gekennzeichnet sind (F_S/F_K = 1).

Wie das Verschleißverhalten in tangentialer Richtung verläuft, istim Bild 3.17 dargestellt. Aus dem Verhältnis der Flächenpressungen zweier symmetrisch gegenüberliegender Flächenelemente läßt sich auf das Verhältnis der Verschleißgeschwindigkeiten für beide Flächenelemente schließen, da bei konstanten Reibungszahlen μ_i sich Reibleistungen proportional zu den zugeordneten Flächenpressungen verhalten. Das gilt aber nur bis zum Erreichen des Mindestschrägverschleißes, d.h. bis der Kolben am Zylinder anschlägt.

Bestimmend für die Größe des Schrägverschleißes, wenn der Kolben im Zylinder bereits verkantet, sind im wesentlichen die geometrischen Abmessungen des Kolbens und des Zylinders. Wenn Δs kleiner ist als der Radius der Kolbenauflagefläche, dann ist das Kolbenspiel entscheidend für die maximale Neigung (Schrägverschleiß) des Bremsklotzes. Entsprechend dem Bild 3.18 läßt sich die maximale Neigung des Kolbens mit der Gleichung

$$\tan \alpha_K = \frac{s_Z}{l_{AK1} + a_A + h - l_{AK2}} \qquad (3.22)$$

ermitteln. Die berechneten tan α_K-Werte für das gegebene Beispiel sind in der Tafel 7 und im Bild 3.19 dargestellt. Für die Bewertung des zu erwartenden Schrägverschleißbildes sind aber die Verschleißhöhendifferenzen in radialer und tangentialer Richtung notwendig. Mit der Gleichung

$$\Delta h_{tang} = h_{l1l_1} - h_{r1l_1} = 2\, |y_{1l_1}| \tan \alpha_K \frac{\Delta a}{\Delta s} \qquad (3.23)$$

läßt sich die Verschleißhöhendifferenz des Belags in tangentialer Richtung (bezogen auf die äußeren Flächenelemente des Kreisringsektors i = 1, j = L_1) berechnen.

In radialer Richtung werden die beiden Radien r_a und r_i auf die Belagsymmetrieachse bezogen, so daß sich für diese beiden Punkte die radiale Verschleißhöhendifferenz durch die Gleichung

$$\Delta h_{rad} = h_{r_i} - h_{r_a} = (r_a - r_i) \tan \alpha_K \frac{\Delta b}{\Delta s} \qquad (3.24)$$

ermitteln läßt. Für das gegebene Berechnungsbeispiel (Variante III) sind die in der Tafel 8 enthaltenen Rechenergebnisse für einen verschlissenen Belag (h_A = 4 mm) im Bild 3.20 dargestellt. Es ist ersichtlich, daß die größten Verschleißdifferenzen in tangentialer Richtung dann auftreten, wenn $\Delta b = 0$ ist. Es ist also insbesondere bei langgestreckten Belägen notwendig, daß $\Delta b > 0$ ist (bzw. < 0), so daß für die tangentiale Verschleißhöhendifferenz h_{tang} ein Verlauf erreicht wird, der einen genau definierten Nulldurchgang besitzt (wie im Bild 3.20 die Kurve Δh_{tang} mit b = 96 mm). Dann läßt sich a so festlegen, daß bei Erreichen des Verschleißgrenzmaßes nur geringe Verschleißhöhendifferenzen in tangentialer Richtung vorliegen. Dabei ist meist ein Kompromiß zwischen hohem Zuspannkraft-Kolbenkraft-Verhältnis und Minimierung des Schrägverschleißes zu finden.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde die Verformung des Sattels vernachlässigt. Es wurde davon ausgegangen, daß der Verschleiß der Reibpaarung im wesentlichen aus leichten Bremsungen resultiert, da diese Bremsungen im Fahrbetrieb überwiegen. Die Verformung des Sattels ist dabei klein. Da bei starken Bremsungen der Sattel weit mehr verformt wird, ändern sich damit die Belastungsverhältnisse. Wie im Bild 3.21 dargestellt, würde, wenn $b > b_c$, der Belag außen mehr verschleißen als innen. Bei starken Bremsungen hätte das zur Folge, daß sich der Sattel entsprechend dieser Schrägstellung verformt und der Kolben frei beweglich ist (keine Reibkräfte an den Berührungsstellen zwischen Kolben und Zylinder). Ist $b < b_o$, dann tritt der Fall ein, daß beim starken Bremsen die Sattelverformung die Schrägstellung verstärkt, da dann der Belag innen mehr als außen verschleißt. Es kommt zu einer Vergrößerung der Reibkräfte am Kolben, weiterhin wird der Reibbelag an den äußeren Belagsektoren wesentlich stärker als an den inneren belastet. Der erste Fall erscheint deshalb am günstigsten für eine Auslegung der geometrischen Verhältnisse an der Scheibenbremse, da hier außerdem bei starken Bremsungen eine bessere Flächenpressenverteilung vorliegt.

Abschließend ist noch festzustellen, daß infolge der großen Abstützkraft F_{A2_y} (716 N) kein Verkanten des Bremsklotzes in den Führungen des Bremssattels auftritt.

4. Numerisches Verfahren zur Berechnung des Funktionsverhaltens von Scheibenbremsenreibpaarungen unter Berücksichtigung der Erwärmung und Reibungszahländerungen

4.1. Voraussetzungen

Das im Punkt 2. vorgestellte numerische Verfahren läßt keine Berechnung des dynamischen Verhaltens der Bremsreibpaarungen zu, da die kleine Speicherkapazität des verwendeten Rechners Temperatur-, Reibungszahl- und Verschleißberechnungen nicht ermöglicht. Außerdem werden in diesem Verfahren die an den Bremsklotzabstützstellen auftretenden Reibungskräfte nicht berücksichtigt. Aufbauend auf den im Punkt 2. dargelegten Grundlagen berücksichtigen die folgenden Ausführungen die oben genannten Einflußfaktoren.

Die Aufteilung der Reibfläche des Bremsbelages erfolgt gemäß den Gleichungen 2.2.8 bis 2.2.10. Die Berechnung der Koordinaten $/x_{ij}/$ und $/y_{ij}/$ erfolgt mit den Gleichungen

$$|x_{ij}| = r_{S_i} \cos\left[\Delta\hat{\varphi}_i\,(j-0{,}5) + \frac{a_N}{2\,r_{S_i}}\right] \qquad (4.1.1)$$

$$|y_{ij}| = r_{S_i} \sin\left[\Delta\hat{\varphi}_i\,(j-0{,}5) + \frac{a_N}{2\,r_{S_i}}\right] \qquad (4.1.2)$$

Der Einfluß der Nutbreite wird angenähert berücksichtigt. Das Verhältnis $0{,}5 a_N / r_{Si}$ entspricht dem Tangens des die Nutbreite charakterisierenden Öffnungswinkels φ_{Ni}. In den Gleichungen 4.1.1 und 4.1.2 wird davon ausgegangen, daß für kleine Winkel $\tan \varphi_{Ni} \approx \varphi_{Ni}$ gilt.

4.2. Untersuchungen zur Ermittlung der Wirkrichtungen der an den Abstützstellen der Bremsklötze entstehenden Reibkräfte

In der Literatur wird oft auf sogenannte Selbstverstärkungseffekte an Bremsklötzen von Scheibenbremsen hingewiesen (z.B. in /18/). Es wird davon ausgegangen, daß, wie im Bild 2.5 dargestellt, die am Bremsklotz angreifenden Abstützstellenreibkräfte (F_{RA1_z}, F_{RA2_z}) entgegen der z-Koordinaten-Richtung wirken, so daß sich ein Δp-Verlauf ergibt, der die durch die Zuspannkraft F_S erzeugte Flächenpressung der Bremsreibpaarung vergrößert. Das ist aber anzuzweifeln, da beim Einleiten des Bremsvorgangs der Reibbelag zusammengepreßt wird und daraus eine Relativbewegung der Belagträgerplatte zur Reibfläche hin resultiert. Demnach müßten sich Reibkräfte an den Abstützstellen ergeben, die in z-Koordinaten-Richtung wirken. Andererseits erzeugen die Belagreibkräfte ein Moment am Bremsklotz, das zu einem Kippen des Bremsklotzes um eine zur x-Achse parallelen Achse führt und bei sehr kleinen Reibungszahlen an den Abstützstellen eine Bewegung der Abstützstellen A1 und A2 des Bremsklotzes in z-Achsen-Richtung zur Folge haben würde. Die daraus resultierenden Reibkräfte sind dann zur Scheibenreibfläche hin gerichtet, wie im Bild 2.5 erkennbar ist. Die beiden dargestellten Einflüsse würden also unabhängig voneinander unterschiedliche Bewegungsrichtungen der Abstützstellen des Bremsklotzes bei kleinen Reibungszahlen und damit unterschiedliche Reibkraftrichtungen verursachen (gilt nur für geschobene Bremsklötze, bei denen die Hauptabstützstellen in Scheibendrehrichtung von dem Zuspannkrafteinleitungspunkt aus angeordnet sind). Im folgenden soll deshalb untersucht werden, welche Reibkraftrichtungen tatsächlich zu erwarten sind. Als Grundlage der Herleitung der Gleichungen zur annähernden Ermittlung der Reibkräfte an den Hauptabstützstellen ist ein zweidimensionales Belastungsmodell entsprechend Bild 4.1 als ausreichend. Werden Belagträgerplatte und Bremsscheibe als starr und der Bremsbelag als elastisch angenommen, wobei die Querkontraktion vernachlässigt wird, dann läßt sich der im Bild 4.1 eingezeichnete Querkraftverlauf nach der Gleichung

$$q = q_0 - k_q\, y \qquad (4.2.1)$$

definieren. Die örtliche Einfederung der Belagträgerplatte ist dann proportional der auftretenden örtlichen Querkraft. Anhand einer gedachten auf die Abstützstellen des Bremsklotzes bezogenen Querkraft kann die Richtung der Reibkräfte an den Abstützstellen definiert werden.

Zur Bestimmung des Querkraftverlaufes werden die vorhandenen Unbekannten im Bild 4.1 definiert. Für die Kräfteäquivalente und Schwerpunktkoordinaten des Querkraftverlaufes lassen sich die Gleichungen 4.2.2 bis 4.2.5 der Anlage 1 herleiten. Entsprechend den Erkenntnissen aus dem Punkt 3. unterscheiden sich die zu erwartenden Beträge der resultierenden Reibkraft der Bremsreibpaarung F_R und deren Komponente F_{R_y} für übliche Belagabmessungen (geringer Überdeckungsgrad zwischen Belag- und Scheibenreibfläche) nur gering voneinander. Damit kann die Reibkraftkomponente F_{R_y} durch die Gleichung

$$F_{R_y} \approx (F_{q_l} + F_{q_r}) \mu_B = 2\, q_0\, l_B\, \mu_B \qquad (4.2.6)$$

definiert werden. Auf der Grundlage der Kräfte und Momentengleichgewichte (Gl. 4.2.7, 4.2.8 , 4.2.9 , 4.2.11 und 4.2.12 der Anlage 1) ergeben sich die Gleichungen für die Konstanten q_0 und k_q der Querkraftgleichung 4.2.1:

$$q_0 = \frac{F_S}{2\, l_B\, (\mu_A \mu_B + 1)} \qquad (4.2.10)$$

$$k_q = F_S \frac{3}{2\, l_B^3} \left(\mu_B \frac{h_A + \mu_A a_1}{\mu_A \mu_B + 1} - a \right) \qquad (4.2.13)$$

Damit lautet die Gleichung für den Querkraftverlauf:

$$q = \frac{F_S}{2\, l_B\, (\mu_A \mu_B + 1)} \cdot \left[3y \frac{a(\mu_A \mu_B + 1) - \mu_B (h_A + \mu_A a_1)}{l_B^2} + 1 \right] \qquad (4.2.14)$$

Die Richtung der Reibkräfte an den Hauptabstützstellen läßt sich ermitteln, indem die Reibungszahl μ_A berechnet wird, bei welcher die Reibkräfte an den Hauptabstützstellen gerade so groß sind, daß bei Belastung der Scheibenbremsenreibpaarung keine Verschiebung der Belagträgerplatte an den Hauptabstützstellen eintritt. Für diesen Fall gilt $y = a_1$ und $q = 0$. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich die Gleichung für die Berechnung der Reibungszahl an den Hauptabstützstellen:

$$\mu_A = \frac{1}{\mu_B(a_1 - a)} \left(\frac{l_B^2}{3 a_1} + a - \mu_B h_A \right) \qquad (4.2.15)$$

Für die Belagkontur I (Punkt 3., $a_1 = 42$ mm, $a = 0$, $l_B \approx 40$ mm, $\mu_B \approx 0{,}4$, $h_A = 12$) beträgt die berechnete Reibungszahl $\mu_A = 0{,}47$. Da der Betrag von μ_A positiv ist, stimmt die reale Richtung der Reibkräfte an den Abstützstellen mit der im Bild 4.1 angenommenen Richtung überein. Damit tritt Selbstschwächung am Bremsklotz auf, da die Reibkräfte an den Abstützstellen entgegen der Zuspannkraft gerichtet sind. Für die komplexen Berechnungen der Belastungsverhältnisse an dieser Bremsenreibpaarung können deshalb für die Bestimmung der Reibkräfte an den Abstützstellen Werte von 0 bis 0.47 für die Reibungszahlen μ_A der Abstützstellen zugrunde gelegt werden, ohne daß größere Ungenauigkeiten zu erwarten sind.

4.3. Ermittlung der Flächenpressungsverteilung unter Berücksichtigung des Belagverschleißes und des E-Moduls

4.3.1. Voraussetzungen

Unter den Vereinfachungen, daß Bremsscheibe und Belagträgerplatte starr seien und die Querkontraktion des Bremsbelages vernachlässigt wird, können unter den Voraussetzungen, daß die einzelnen Elemente des Belags elastisch sind und der E-Modul für ein Element als konstant angenommen wird, ausgehend vom Bild 4.2 die Gleichungen für die partiellen Flächenpressungen aufgestellt werden. Auf der Grundlage der allgemein gültigen Gleichungen für den E-Modul

$$E = \frac{F}{A\,\varepsilon} \tag{4.3.1}$$

und der Dehnung

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{4.3.2}$$

lassen sich die Gleichungen für die partiellen Normalkräfte herleiten (ε so angesetzt, daß die Normalkräfte positiv werden):

$$F_{Nl_{ij}} = E_i\,A\,\left(1 - \frac{h_{bl_{ij}}}{h_0 - \Delta h_{l_{ij}}}\right) \tag{4.3.3}$$

$$F_{Nr_{ij}} = E_i\ A_i\ \left(1 - \frac{h_{br_{ij}}}{h_0 - \Delta h_{r_{ij}}}\right) \qquad (4.3.4)$$

Der Verlauf der Belaghöhen im belasteten Zustand läßt sich durch die Gleichungen

$$h_{bl_{ij}} = C_9 + C_{10}\,|x_{ij}| + C_{11}\,|y_{ij}| \qquad (4.3.5)$$

$$h_{br_{ij}} = C_9 + C_{10}\,|x_{ij}| - C_{11}\,|y_{ij}| \qquad (4.3.6)$$

darstellen, wenn der Einfluß des Scheibenverschleißes vernachlässigt wird (ebene Scheibe). Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

- partielle Normalkräfte

$$F_{NL_{ij}} = E_i\ A_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{L_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}\,|x_{ij}| + C_{11}\,|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.7)$$

$$F_{Nr_{ij}} = E_i\ A_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{r_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}\,|x_{ij}| - C_{11}\,|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.8)$$

- partielle Flächenpressungen

$$p_{l_{ij}} = E_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{l_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}|x_{ij}| + C_{11}|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.9)$$

$$p_{r_{ij}} = E_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{r_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}|x_{ij}| - C_{11}|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.10)$$

- partielle Reibkräfte

$$F_{Rl_{ij}} = E_i A_i \mu_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{l_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}|x_{ij}| + C_{11}|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.11)$$

$$F_{Rr_{ij}} = E_i A_i \mu_i\left[1 - \frac{1}{h_0 - \Delta h_{r_{ij}}}\left(C_9 + C_{10}|x_{ij}| - C_{11}|y_{ij}|\right)\right] \qquad (4.3.12)$$

- partielle Reibkraftkomponenten

$$F_{Rlijx} = F_{Rlij} \frac{|y_{ij}|}{r_{S_i}} \qquad (4.3.13)$$

$$F_{Rrijx} = F_{Rrij} \frac{|y_{ij}|}{r_{S_i}} \qquad (4.3.14)$$

$$F_{Rlijy} = F_{Rlij} \frac{|x_{ij}|}{r_{S_i}} \qquad (4.3.15)$$

$$F_{Rrijy} = F_{Rrij} \frac{|x_{ij}|}{r_{S_i}} \qquad (4.3.16)$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage der folgenden Unterpunkte.

4.3.2. Ermittlung der Konstanten der Ebenengleichungen für einen geschobenen Bremsklotz mit zwei Hauptabstützstellen

Im Bild 4.3 sind die angreifenden Kräfte am Bremsklotz dargestellt. Die Abstützkräfte in x-Richtung sind vernachlässigbar, wie die im Abschnitt 3. berechneten F_{R_x}-Werte zeigen. Außerdem werden diese Kräfte auch in den Abstützstellen A1 und A2 zum Teil mit abgestützt. Eine exakte Zuordnung der Anteile auf die einzelnen Abstützstellen ist mit vertretbarem Aufwand ohnehin nicht möglich.

Schwierigkeiten bereitet die Ermittlung der Höhen der Abstützstellen h_{A1} und h_{A2}. Die exakten Gleichungen für die Höhen im belasteten Zustand lauten:

$$h_{A1} = C_9 + C_{10} b_1 + C_{11} a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.17)$$

$$h_{A2} = C_9 + C_{10} b_2 - C_{11} a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.18)$$

Werden bei der Aufstellung der Kräfte und Momentengleichgewichte diese Gleichungen berücksichtigt, dann ergeben sich quadratische Gleichungen für die Ermittlung der Konstanten der Ebenengleichungen.

Zur Minimierung des rechentechnischen Aufwandes erscheint es gerechtfertigt, die Abstützhöhen im unbelasteten Zustand des Bremsklotzes für die Ermittlung der Konstanten der Ebenengleichungen anzusetzen (die Einfederung des Belags < 0,1 mm). Drei ausgewählten Punkten werden die folgenden Gleichungen der Belaghöhen zugeordnet:

$$hul_{1l_1} = C_{9_u} + C_{10_u} |x_{1l_1}| + C_{11_u} |y_{1l_1}| \tag{4.3.19}$$

$$hul_{k1} = C_{9_u} + C_{10_u} |x_{k1}| + C_{11_u} |y_{k1}| \tag{4.3.20}$$

$$hur_{1l_1} = C_{9_u} + C_{10_u} |x_{1l_1}| - C_{11_u} |y_{1l_1}| \tag{4.3.21}$$

Daraus lassen sich die Konstantengleichungen ableiten:

$$C_{11_u} = \frac{hul_{1l_1} - hur_{1l_1}}{2\,|y_{1l_1}|} \tag{4.3.22}$$

$$C_{10_u} = \frac{hul_{1l_1} - hul_{k1} + C_{11_u}(|y_{k1}| - |y_{1l_1}|)}{|x_{1l_1}| - |x_{k1}|} \tag{4.3.23}$$

$$C_{9u} = h_{ur1l_1} - C_{10u}|x_{1l_1}| + C_{11u}|y_{1l_1}| \qquad (4.3.24)$$

Legt man die Koordinaten für die Abstützstellen zugrunde, dann ergeben sich die Gleichungen für die Abstützhöhen:

$$h_{A1} = C_{9u} + C_{10u}\, b_1 + C_{11u}\, a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.25)$$

$$h_{A2} = C_{9u} + C_{10u}\, b_2 + C_{11u}\, a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.26)$$

Aus den Momentengleichgewichten um die Abstützstellen $\sum M_{A1} = 0$ und $\sum M_{A2} = 0$ (Gl. 4.3.27 bis 4.3.41 und 4.3.43 in der Anlage 1) ergeben sich die Gleichungen für die Hauptabstützkräfte:

$$F_{A2y} = \frac{C_9(b_1 S_{19} - S_{20} + a_1 S_{25} - S_{26}) + C_{10}(b_1 S_{20} - S_{21} + a_1 S_{22} - S_{24})}{b_2 - b_1}$$

$$+ \frac{C_{11}(b_1 S_{22} - S_{23} + a_1 S_{26} - S_{27}) + 2(S_{16} + S_{18} - b_1 S_{15})}{b_2 - b_1} \qquad (4.3.42)$$

$$F_{A1y} = \frac{-C_9(b_2S_{19}-S_{20}+a_1S_{25}-S_{26})-C_{10}(b_2S_{20}-S_{21}+a_1S_{22}-S_{24})}{b_2-b_1}$$

$$+\frac{-C_{11}(b_2S_{22}-S_{23}+a_1S_{26}-S_{27})-2(S_{16}+S_{18}-b_2S_{15})}{b_2-b_1} \qquad (4.3.44)$$

Damit läßt sich aus dem Kräftegleichgewicht $\Sigma F_z = 0$ (Gl. 4.3.45 bis 4.3.50 in der Anlage 1) die erste Grundgleichung für die Konstantenermittlung herleiten:

$$0 = F_S + C_9(\mu_A S_{19} + S_{28}) + C_{10}(\mu_A S_{20} + S_{29})$$

$$+C_{11}(\mu_A S_{22} + S_{30}) - 2(\mu_A S_{15} + S_{31}) \qquad (4.3.51)$$

Die zweite Grundgleichung für die Konstantenermittlung resultiert aus dem Momentengleichgewicht $\Sigma M_x = 0$ (Gl. 4.3.52 bis 4.3.55 in der Anlage 1):

$$0 = F_S\, a$$

$$+ C_9\left[\frac{S_{19}(h_{A1}b_2-h_{A2}b_1)-(h_{A1}-h_{A2})(S_{20}-a_1S_{25}+S_{26})}{b_2-b_1} + a_1\mu_A S_{19} + S_{30}\right]$$

$$+ C_{10}\left[\frac{S_{20}(h_{A1}b_2-h_{A2}b_1)-(h_{A1}-h_{A2})(S_{21}-a_1S_{22}+S_{24})}{b_2-b_1} + a_1\mu_A S_{20} + S_{33}\right]$$

$$+ C_{11}\left[\frac{S_{22}(h_{A1}b_2-h_{A2}b_1)-(h_{A1}-h_{A2})(S_{23}-a_1S_{26}+S_{27})}{b_2-b_1} + a_1\mu_A S_{22}+S_{34}\right]$$

$$-2\left[\frac{S_{15}(h_{A1}b_2-h_{A2}b_1)-(h_{A1}-h_{A2})(S_{16}+S_{18})}{b_2-b_1} + a_1\mu_A S_{15}\right] \quad (4.3.56)$$

Unter der Voraussetzung, daß die resultierende Reibkraftkomponente in x-Richtung (F_{R_x}) vernachlässigt wird, erfolgt die Herleitung der dritten Grundgleichung für die Konstantenermittlung aus dem Momentengleichgewicht um die y-Achse $\sum M_y = 0$ (Gl. 4.3.57 bis 4.3.60 in der Anlage 1).

$$0 = F_S\, b$$

$$+\left[\mu_A(S_{20}-a_1S_{25}+S_{26}) + S_{29}\right]$$

$$+\left[\mu_A(S_{21}-a_1S_{22}+S_{24}) + S_{35}\right]$$

$$+\left[\mu_A(S_{23}-a_1S_{26}+S_{27}) + S_{33}\right]$$

$$-2\left[\mu_A(S_{16}+S_{18}) + S_{36}\right] \quad (4.3.61)$$

Eine Zusammenfassung der Komponenten der Grundgleichungen in Hilfskonstanten entsprechend der Gleichungen 4.3.62 bis 4.3.73 in der Anlage 1 ermöglicht die folgende übersichtliche Darstellung der drei Grundgleichungen:

$$\Sigma F_z = 0 = C_9 C_{h1} + C_{10} C_{h2} + C_{11} C_{h3} - C_{h4} \qquad (4.3.74)$$

$$\Sigma M_x = 0 = C_9 C_{h5} + C_{10} C_{h6} + C_{11} C_{h7} - C_{h8} \qquad (4.3.75)$$

$$\Sigma M_y = 0 = C_9 C_{h9} + C_{10} C_{h10} + C_{11} C_{h11} - C_{h12} \qquad (4.3.76)$$

Die Gleichungen zur Berechnung der Konstanten lauten dann:

$$C_{11} = \frac{(C_{h4}C_{h5} - C_{h1}C_{h8})(C_{h2}C_{h9} - C_{h1}C_{h10})}{(C_{h3}C_{h5} - C_{h1}C_{h7})(C_{h2}C_{h9} - C_{h1}C_{h10})}$$

$$\frac{-(C_{h4}C_{h9} - C_{h1}C_{h12})(C_{h2}C_{h5} - C_{h1}C_{h6})}{-(C_{h3}C_{h9} - C_{h1}C_{h11})(C_{h2}C_{h5} - C_{h1}C_{h6})} \qquad (4.3.77)$$

$$C_{10} = \frac{C_{h4} C_{h9} - C_{h1} C_{h12}}{C_{h2} C_{h9} - C_{h1} C_{h10}} - C_{11} \frac{C_{h3} C_{h9} - C_{h1} C_{h11}}{C_{h2} C_{h9} - C_{h1} C_{h10}} \qquad (4.3.78)$$

$$C_9 = \frac{C_{h4}}{C_{h1}} - C_{10} \frac{C_{h2}}{C_{h1}} - C_{11} \frac{C_{h3}}{C_{h1}} \qquad (4.3.79)$$

4.3.3. <u>Ermittlungen der Konstanten der Ebenengleichungen für einen geschobenen Bremsklotz mit einer Hauptabstützstelle</u>

Im Bild 4.4 sind die angreifenden Kräfte am geschobenen Bremsklotz mit einer Hauptabstützstelle dargestellt. Analog den Ausführungen im Punkt 4.3.1. (Gl. 4.3.17 bis 4.3.26) werden die Abstützhöhen der drei Abstützstellen durch folgende Gleichungen ermittelt:

$$h_{A1} = C_{9_u} + C_{10_u} b_1 + C_{11_u} a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.80)$$

$$h_{A2} = C_{9_u} + C_{10_u} b_2 + C_{11_u} a_2 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.81)$$

$$h_{A3} = C_{9_u} + C_{10_u} b_3 - C_{11_u} a_3 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.82)$$

Da es unbestimmt ist, welche Richtungen die beiden Nebenabstützkräfte F_{A2_x} und F_{A3_x} haben werden, ist es erforderlich, Vorzeichenkonstanten einzuführen (vz_2 und vz_3), mit denen in der später durchzuführenden Konstantenermittlung erreicht wird, daß die Reibkräfte an den Abstützstellen positiv bleiben. Zur Ermittlung der Vorzeichenkonstanten vz_2 und vz_3 ist eine annähernde Ermittlung der Abstützkräfte F_{A1_y}, F_{A2_x} und F_{A3_x} erforderlich. Es gelten die folgenden Vereinfachungen:

$$a_1 = a_2 \qquad (4.3.83)$$

$$b_1 = b_2 \qquad (4.3.84)$$

$$\mu_A = 0 \qquad (4.3.85)$$

$$\mu_i = \mu_B = \text{konst.} \qquad (4.3.86)$$

$$E_i = E_i = \text{konst.} \qquad (4.3.87)$$

$$h_{A1} = h_{A2} = h_{A3} = 0 \qquad (4.3.88)$$

Damit gilt die folgende Darstellung der partiellen Flächenpressungen, Normalkräfte und Reibkräfte:

$$p_{l_{ij}} = C_{12} + C_{13}\,|x_{ij}| + C_{14}\,|y_{ij}| \qquad (4.3.89)$$

$$p_{r_{ij}} = C_{12} + C_{13}\,|x_{ij}| - C_{14}\,|y_{ij}| \qquad (4.3.90)$$

$$F_{Nl_{ij}} = A_i\,(C_{12} + C_{13}\,|x_{ij}| + C_{14}\,|y_{ij}|) \qquad (4.3.91)$$

$$F_{Nr_{ij}} = A_i\,(C_{12} + C_{13}\,|y_{ij}| - C_{14}\,|y_{ij}|) \qquad (4.3.92)$$

$$F_{Rl_{ijx}} = \mu_B \frac{A_i}{r_{S_i}}(C_{12}\,|y_{ij}| + C_{13}\,|x_{ij}||y_{ij}| + C_{14}\,|y_{ij}|^2) \qquad (4.3.93)$$

$$F_{Rr_{ijx}} = \mu_B \frac{A_i}{r_{S_i}}(C_{12}\,|y_{ij}| + C_{13}\,|x_{ij}||y_{ij}| - C_{14}\,|y_{ij}|^2) \qquad (4.3.94)$$

$$F_{Rl_{ijy}} = \mu_B \frac{A_i}{r_{S_i}}(C_{12}\,|x_{ij}| + C_{13}\,|x_{ij}|^2 + C_{14}\,|x_{ij}||y_{ij}|) \qquad (4.3.95)$$

$$F_{Rr_{ijy}} = \mu_B \frac{A_i}{r_{S_i}}(C_{12}\,|x_{ij}| + C_{13}\,|x_{ij}|^2 - C_{14}\,|x_{ij}||y_{ij}|) \qquad (4.3.96)$$

Unter Beachtung der vorgenommenen Vereinfachungen lassen sich die drei Abstützkräfte angenähert ermitteln (Gl. 4.3.97 bis 4.3.115 in der Anlage 1). Werden die Konstanten C_{A1} und C_{A2} vorgesehen, so erfolgt die Vorzeichenauswahl nach folgenden Kriterien:

$$vz_2 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad C_{A1} < \dfrac{F_{A2x}}{F_{A1y}} \\ 0 & \text{für} \quad -C_{A1} \leqslant \dfrac{F_{A2x}}{F_{A1y}} \leqslant C_{A1} \\ -1 & \text{für} \quad \dfrac{F_{A2x}}{F_{A1y}} < C_{A1} \end{cases} \qquad (4.3.116)$$

$$vz_3 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad C_{A2} < \dfrac{F_{A3x}}{F_{A1y}} \\ 0 & \text{für} \quad -C_{A2} \leqslant \dfrac{F_{A3x}}{F_{A1y}} \leqslant C_{A2} \\ -1 & \text{für} \quad \dfrac{F_{A3x}}{F_{A1y}} < C_{A2} \end{cases} \qquad (4.3.117)$$

57

Damit kann mit der Ermittlung der Konstanten begonnen werden. Aus den Kräfte- und Momentengleichgewichten ΣF_y, ΣF_x und ΣM_{A2} (Gl. 4.3.118, 4.3.120 und 4.3.122 in der Anlage 1) ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Abstützkräfte:

$$F_{A1y} = -C_9 S_{19} - C_{10} S_{20} - C_{11} S_{22} + 2 S_{15} \qquad (4.3.119)$$

$$F_{A3x} = -C_9 \frac{S_{20} + S_{26} - b_1 S_{19} - a_2 S_{25}}{a_2 + a_3}$$

$$-C_{10} \frac{S_{21} + S_{24} - b_1 S_{20} - a_2 S_{22}}{a_2 + a_3}$$

$$-C_{11} \frac{S_{23} + S_{27} - b_1 S_{22} - a_2 S_{26}}{a_2 + a_3}$$

$$+2 \frac{S_{16} + S_{18} - b_1 S_{15}}{a_2 + a_3} \qquad (4.3.121)$$

$$F_{A2x} = -C_9 \frac{S_{20} + S_{26} - b_1 S_{19} + a_3 S_{25}}{a_2 + a_3}$$

$$-C_{10} \frac{S_{21} + S_{24} - b_1 S_{20} + a_3 S_{22}}{a_2 + a_3}$$

$$-C_{11} \frac{S_{23} + S_{27} - b_1 S_{22} + a_3 S_{26}}{a_2 + a_3}$$

$$+2 \frac{S_{16} + S_{18} - b_1 S_{15}}{a_2 + a_3} \qquad (4.3.123)$$

Aus den Gleichgewichten $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$ und $\Sigma M_y = 0$ (Gl. 4.3.124, 4.3.126 und 4.3.128) lassen sich die folgenden Grundgleichungen herleiten:

$$\Sigma F_z = 0 = F_S$$

$$+ C_9 \Big[S_{28} + \mu_A S_{19}$$

$$+ \mu_A \frac{(vz_2 + vz_3)(S_{20} + S_{26} - b_1 S_{19}) + S_{25}(vz_2 a_3 - vz_3 a_2)}{a_2 + a_3} \Big]$$

$$+ C_{10} \Big[S_{29} + \mu_A S_{20}$$

$$+ \mu_A \frac{(vz_2 + vz_3)(S_{21} + S_{24} - b_1 S_{20}) + S_{22}(vz_2 a_3 - vz_3 a_2)}{a_2 + a_3} \Big]$$

$$+ C_{11} \Big[S_{30} + \mu_A S_{22}$$

$$+\mu_A \frac{(vz_2+vz_3)(S_{23}+S_{27}-b_1S_{22})+S_{26}(vz_2a_3-vz_3a_2)}{a_2+a_3}\Big]$$

$$-2\Big[S_{31}+\mu_A S_{15}$$

$$+\mu_A \frac{(vz_2+vz_3)(S_{16}+S_{18}-b_1S_{15})}{a_2+a_3}\Big] \qquad (4.3.125)$$

$$\Sigma M_x=0=F_S\, a$$

$$+C_9\Big[S_{30}+S_{19}(h_{A1}+\mu_A a_1)$$

$$+\mu_A \frac{(a_2vz_2-a_3vz_3)(S_{20}+S_{26}-b_1S_{19})+S_{25}a_2a_3(vz_2+vz_3)}{a_2+a_3}\Big]$$

$$+C_{10}\Big[S_{33}+S_{20}(h_{A1}+\mu_A a_1)$$

$$+\mu_A \frac{(a_2vz_2-a_3vz_3)(S_{21}+S_{24}-b_1S_{20})+S_{22}a_2a_3(vz_2+vz_3)}{a_2+a_3}\Big]$$

$$+C_{11}\Big[S_{34}+S_{22}(h_{A1}+\mu_A a_1)$$

$$+\mu_A \frac{(a_2vz_2-a_3vz_3)(S_{23}+S_{27}-b_1S_{22})+S_{26}a_2a_3(vz_2+vz_3)}{a_2+a_3}\Big]$$

$$-2\Big[S_{25}(h_{A1}+\mu_A a_3)$$

$$+\mu_A \frac{(a_2vz_2-a_3vz_3)(S_{16}+S_{18}-b_1S_{15})}{a_2+a_3}\Big] \qquad (4.3.127)$$

$$\Sigma M_y = 0 = F_S\, b$$

$$+C_9\Big[S_{29} + S_{19}\,\mu_{A}\,b_1$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_2 v z_2 - h_{A2})(S_{20}+S_{26}-b_1 S_{19}+a_3 S_{25})}{a_2+a_3}$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_3 v z_3 + h_{A3})(S_{20}+S_{26}-b_1 S_{19}-a_2 S_{25})}{a_2+a_3}\Big]$$

$$+C_{10}\Big[S_{35} + S_{20}\,\mu_{A}\,b_1$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_2 v z_2 - h_{A2})(S_{21}+S_{24}-b_1 S_{20}+a_3 S_{22})}{a_2+a_3}$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_3 v z_3 + h_{A3})(S_{21}+S_{24}-b_1 S_{20}-a_2 S_{22})}{a_2+a_3}\Big]$$

$$+C_{11}\Big[S_{33} + S_{22}\,\mu_{A}\,b_1$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_2 v z_2 - h_{A2})(S_{23}+S_{27}-b_1 S_{22}+a_3 S_{26})}{a_2+a_3}$$

$$+\frac{(\mu_{A} b_3 v z_3 + h_{A3})(S_{23}+S_{27}-b_1 S_{22}-a_2 S_{26})}{a_2+a_3}\Big]$$

$$-2\Big[S_{36} + S_{15}\,\mu_{A}\,b_1$$

$$+\frac{(\mu_A b_2 vz_2 - h_{A2})(S_{16}+S_{18}-b_1 S_{15})}{a_2+a_3}$$

$$+\frac{(\mu_A b_3 vz_3 - h_{A3})(S_{16}+S_{18}-b_1 S_{15})}{a_2+a_3}\Bigg] \qquad (4.3.129)$$

Entsprechend der Gleichungen 4.3.74 bis 4.3.79 werden mit den Hilfskonstanten C_{h1} bis C_{h12} (Gl. 4.3.130 bis 4.3.141 in der Anlage 1) die Konstanten der Ebenengleichungen ermittelt.

4.3.4. Ermittlung der Konstanten der Ebenengleichungen für einen gezogenen Bremsklotz mit einer Hauptabstützstelle

Im Bild 4.5 sind die angreifenden Kräfte am geschobenen Bremsklotz mit einer Hauptabstützstelle dargestellt. Analog den Ausführungen im Punkt 4.3.1. (Gl. 4.3.17 bis 4.3.26) werden die Abstützhöhen der drei Abstützstellen durch folgende Gleichungen ermittelt:

$$h_{A1} = C_{9_u} + C_{10_u} b_1 - C_{11_u} a_1 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.142)$$

$$h_{A2} = C_{9_u} + C_{10_u} b_2 - C_{11_u} a_2 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.143)$$

$$h_{A3} = C_{9_u} + C_{10_u} b_3 + C_{11_u} a_3 + \frac{a_A}{2} \qquad (4.3.144)$$

Da unbestimmt ist, welche Richtungen die beiden Nebenabstützkräfte F_{A1_x} und F_{A2_x} haben werden, ist es erforderlich, Vorzeichenkonstanten einzuführen (vz_1 und vz_2), mit denen in der anschließenden Konstantenermittlung erreicht wird, daß die Reibkräfte an den Abstützstellen immer positiv sind. Weiterhin ist davon auszugehen, daß an der Hauptabstützstelle A1 die beiden Kräfte F_{A1_y} und F_{A1_x} an den gleichen Stellen angreifen (Linienberührung am Abstützbolzen), so daß für eine exakte Berechnung der Reibkraft an der Abstützstelle A1 der Betrag der resultierenden Abstützkraft nach dem Satz des Phythagoras berechnet werden muß. Damit wird die Ermittlung der Konstanten der Ebenengleichungen wesentlich aufwendiger. Mit Einführung der Kenngröße K_1, des relativen Anteils κ_1 der Abstützkraft F_{A1_x}, ist eine einfachere angenäherte Lösung möglich. Für die Ermittlung der Vorzeichenkonstanten vz_1 und vz_2 und des relativen Anteils K_1 sind die Abstützkräfte F_{A1_y}, F_{A1_x} und F_{A2_x} annähernd zu ermitteln. Es gelten die Vereinfachungen Gl. 4.3.85 bis 4.3.88. Die Darstellung der partiellen Normalkräfte und Reibkräfte erfolgt entsprechend den Gleichungen 4.3.89 bis 4.3.96. Auf der Grundlage der bereits aufgestellten Konstantengleichungen 4.3.89 bis 4.3.102 in der Anlage 1 lassen sich die drei Abstützkräfte annähernd berechnen (Gl. 4.3.145 bis 4.3.150). Werden die Konstanten C_{A1} und C_{A2} vorgegeben, so erfolgt die Vorzeichenauswahl nach folgenden Kriterien:

$$vz_1 = \begin{cases} 1 & \text{für } C_{A1} < \dfrac{FA1_x}{FA1_y} \\ 0 & \text{für } -C_{A1} \leq \dfrac{FA1_x}{FA1_y} \leq C_{A1} \\ -1 & \text{für } \dfrac{FA1_x}{FA1_y} < C_{A1} \end{cases} \tag{4.3.151}$$

$$vz_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } C_{A2} < \dfrac{FA2_x}{FA1_y} \\ 0 & \text{für } -C_{A2} \leq \dfrac{FA2_x}{FA1_y} \leq C_{A2} \\ -1 & \text{für } \dfrac{FA2_x}{FA1_y} < C_{A2} \end{cases} \tag{4.3.152}$$

Der relative Anteil wird nach folgender Gleichung berechnet:

$$K_1 = \left| \frac{\sqrt{FA1_x^{\,2} + FA1_y^{\,2}} - FA1_y}{FA1_x} \right| \tag{4.3.153}$$

Damit können die Gleichungen zur Konstantenermittlung hergeleitet werden. Aus den Kräfte- und Momentengleichgewichten $\sum F_y$, $\sum F_x$ und $\sum M_{A1}$ (Gl. 4.3.154, 4.3.156 und 4.3.158 in der Anlage 1) ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Abstützkräfte:

$$F_{A1_y} = -C_9 S_{19} - C_{10} S_{20} - C_{11} S_{22} + 2 S_{15} \tag{4.3.155}$$

$$\begin{aligned} F_{A2_x} = & -C_9 \frac{b_1 S_{19} - a_1 S_{25} - S_{20} - S_{26}}{a_1 + a_2} \\ & -C_{10} \frac{b_1 S_{20} - a_1 S_{22} - S_{21} - S_{24}}{a_1 + a_2} \\ & -C_{11} \frac{b_1 S_{22} - a_1 S_{26} - S_{23} - S_{27}}{a_1 + a_2} \\ & +2 \frac{b_1 S_{15} - S_{16} - S_{18}}{a_1 + a_2} \end{aligned} \tag{4.3.157}$$

$$F_{A1_x} = -C_9 \left(\frac{b_1 S_{19} - a_1 S_{25} - S_{20} - S_{26}}{a_1 + a_2} + S_{25} \right)$$

$$-C_{10}\left(\frac{b_1S_{20}-a_1S_{22}-S_{21}-S_{24}}{a_1+a_2}+S_{22}\right)$$

$$-C_{11}\left(\frac{b_1S_{22}-a_1S_{26}-S_{23}-S_{27}}{a_1+a_2}+S_{26}\right)$$

$$+2\ \frac{b_1S_{15}-S_{16}-S_{18}}{a_1+a_2} \qquad (4.3.159)$$

Aus den Gleichgewichten $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ und $\sum M_y = 0$ (Gl. 4.3.160, 4.3.162 und 4.3.164 in der Anlage 1) lassen sich die folgenden Grundgleichungen herleiten:

$$\sum F_z = 0 = F_S$$

$$+C_9\Big[S_{28}+\mu_A(S_{19}+vz_1k_1S_{25})$$

$$+\mu_A\frac{(vz_1k_1+vz_2)(b_1S_{19}-a_1S_{25}-S_{20}-S_{26})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$+C_{10}\Big[S_{29}+\mu_A(S_{20}+vz_1k_1S_{22})$$

$$+\mu_A\frac{(vz_1k_1+vz_2)(b_1S_{20}-a_1S_{22}-S_{21}-S_{24})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$+C_{11}\Big[S_{30}+\mu_A(S_{22}+vz_1k_1S_{26})$$

$$+\mu_A\frac{(vz_1k_1+vz_2)(b_1S_{22}-a_1S_{26}-S_{23}-S_{27})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$-2\Big[S_{31}+\mu_A S_{15}$$

$$+\mu_A\frac{(vz_1k_1+vz_2)(b_1S_{15}-S_{16}-S_{18})}{a_1+a_2}\Big] \quad (4.3.161)$$

$$\Sigma M_x=0=F_S\,a$$

$$+C_9\Big[S_{30}+h_{A1}S_{19}-\mu_A a_1(S_{19}+vz_1k_1S_{25})$$

$$-\mu_A\frac{(a_1vz_1k_1-a_2vz_2)(b_1S_{19}-a_1S_{25}-S_{20}-S_{26})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$+C_{10}\Big[S_{33}+h_{A1}S_{20}-\mu_A a_1(S_{20}+vz_1k_1S_{22})$$

$$-\mu_A\frac{(a_1vz_1k_1-a_2vz_2)(b_1S_{20}-a_1S_{22}-S_{21}-S_{24})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$+C_{11}\Big[S_{34}+h_{A1}S_{22}-\mu_A a_1(S_{22}+vz_1 k_1 S_{26})$$

$$+\mu_A\frac{(a_1 vz_1 k_1-a_2 vz_2)(b_1 S_{22}-a_1 S_{26}-S_{23}-S_{27})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$-2\Big[h_{A1}S_{15}-\mu_A a_1 S_{15}$$

$$-\mu_A\frac{(a_1 vz_1 k_1-a_2 vz_2)(b_1 S_{15}-S_{16}-S_{18})}{a_1+a_2}\Big] \qquad (4.3.163)$$

$$\Sigma M_x=0=F_S\ b$$

$$+C_9\Big[S_{29}+\mu_A b_1 S_{19}+(\mu_A b_1 vz_1 k_1-h_{A1})S_{25}$$

$$+\frac{(\mu_A b_1 vz_1 k_1-h_{A1}+\mu_A b_2 vz_2+h_{A2})(b_1 S_{19}-a_1 S_{25}-S_{20}-S_{26})}{a_1+a_2}\Big]$$

$$+C_{10}\Big[S_{35}+\mu_A b_1 S_{20}+(\mu_A b_1 vz_1 k_1-h_{A1})S_{22}$$

$$+\frac{(\mu_A b_1 vz_1 k_1-h_{A1}+\mu_A b_2 vz_2+h_{A2})(b_1 S_{20}-a_1 S_{22}-S_{21}-S_{24})}{a_1+a_2}\Big]$$